

Unidad III: Curvas en R2 y ecuaciones paramétricas

2.1 Ecuación paramétrica de la línea recta.

La recta constituye una parte fundamental de las matemáticas. Existen numerosas formas de representar una recta, lo que incluye tanto la forma para métrica como la vectorial. Un espacio tridimensional puede ser utilizado para determinar una ecuación vectorial que denote una línea recta. El parámetro es sencillamente una variable cuyo objetivo principal es describir una relación particular con la ayuda de los parámetros.

Por tanto, una ecuación para métrica es una ecuación que está basada en una variable en particular. Una ecuación para métrica en términos generales, se conoce también como representación para métrica. Ejemplo: Considere la ecuación $x = 2 + 3t$. En esta ecuación, t denota el parámetro y la ecuación se conoce como ecuación para métrica en términos de t . Si así consta, por lo general, las ecuaciones de la forma $x = x_0 + ta$; $y = y_0 + tb$; $z = z_0 + tc$ representan las ecuaciones para métricas de línea recta. Para conseguir un punto particular en la recta, todo lo que tenemos que hacer es tomar el valor de t de cualquiera de las ecuaciones e insertarlo en otra ecuación. Como resultado, obtenemos las coordenadas reales de un punto determinado en la recta.

Consideremos un ejemplo con el fin de encontrar una ecuación para métrica para una recta entre los puntos $(-1, 3)$ y $(1, 1)$.
Paso 1: De los puntos dados en el enunciado, elija uno como punto inicial. Consideremos a $(-1, 3)$ como punto inicial.
Paso 2: Ahora, tomemos las coordenadas x para los rangos indicados. Es posible observar que -1 está a 2 unidades de distancia del 1. Por tanto, $x = -1 + 2t$
Paso 3: Del mismo modo, teniendo en cuenta las coordenadas y para los rangos indicados, es posible ver que el 3 está a -2 unidades de distancia del 1. Por tanto, $y = 3 - 2t$.

2.2 Curvas planas

Curva plana

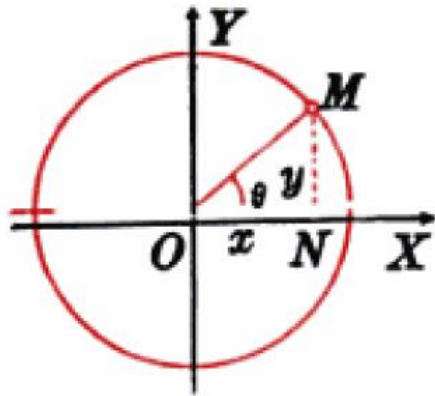
Una curva plana es aquella que reside en un solo plano y puede ser abierta o cerrada. La representación gráfica de una función real de una variable real es una curva plana.

Una curva geométrica mente hablando diremos que intuitivamente, es el conjunto de puntos que representan las distintas posiciones ocupadas por un punto que se mueve; si se usa el término curva por oposición a recta o línea poligonal, habría que excluir de esta noción los casos de, aquellas líneas que cambian continuamente de dirección, pero de forma suave, es decir, sin formar ángulos. Esto las distingue de las líneas rectas y de las quebradas. Estarían fuera de esta noción los casos de movimiento rectilíneo. Sin embargo, utilizando la definición matemática, una línea recta es un caso.

2.3 Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación gráfica.

CIRCUNFERENCIA

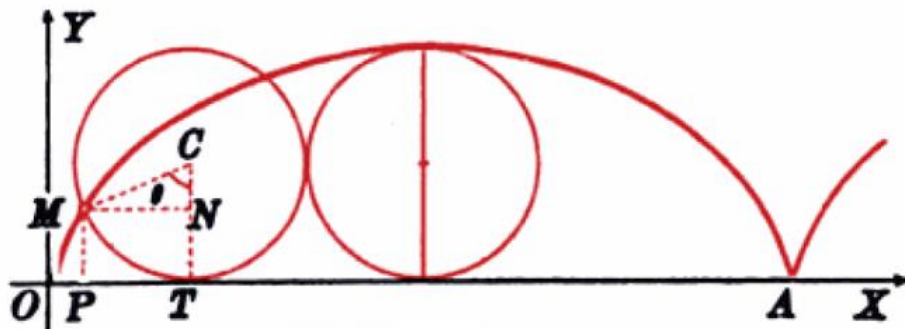
Sea la circunferencia de centro en O y radio a . sean además $M(x,y)$ un punto de la curva y $\Theta = \text{áng}XOM$.



CICLOIDE

Es la curva descrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, a lo largo de una recta fija.

Tómese al eje x como la recta fija OX sobre la cual se hace rodar la circunferencia de centro C y radio r , y sea M el punto fijo que describe la curva.



2.4 Derivada de una función dada paramétricamente.

Si una curva suave C está dada por la ecuaciones $x=f(t)$ y $y=g(t)$, entonces la pendiente de

C en (x,y) es:

Esto se da ya que cumple con el teorema que proporciona las condiciones necesarias para

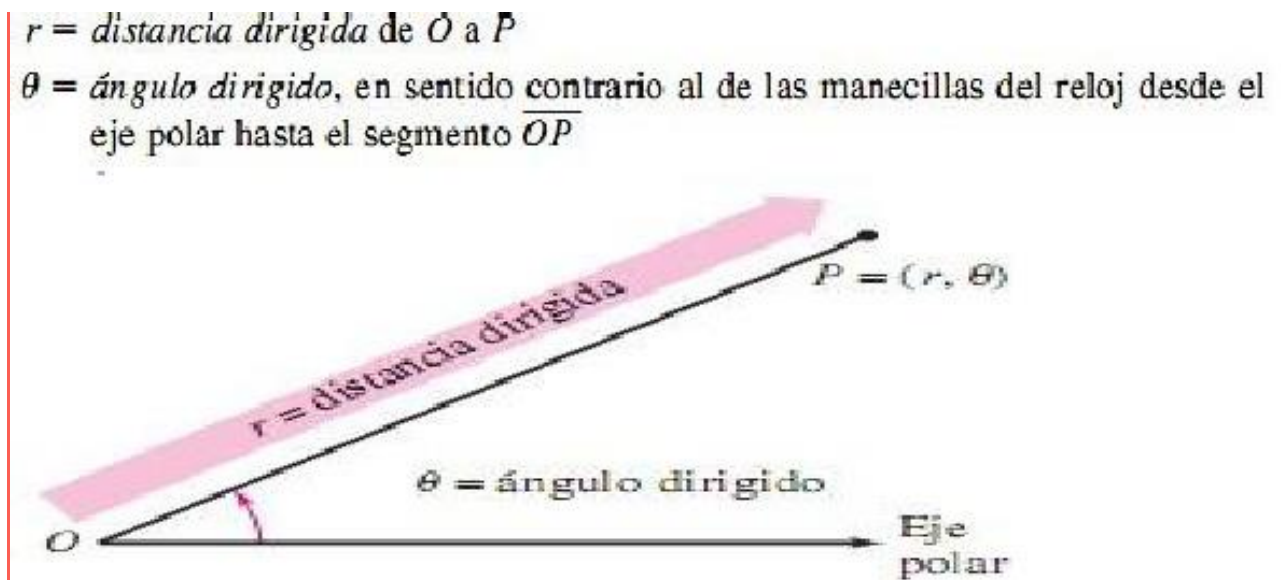
obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica:

Derivadas de orden superior para una función dada en forma paramétrica

2.5 Coordenadas polares.

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto O , llamado polo (u origen), y a partir de O , se traza un rayo inicial llamado eje polar.

a cada punto P en el plano se le asignan coordenadas polares (r, θ) , como sigue.



2.6 Graficación de curvas planas en coordenadas polares.

Unidad III: Funciones vectoriales de una variable real.

3.1 Definición de función vectorial de una variable real.

Las funciones vectoriales, también conocidas con el nombre de funciones valoradas vectoriales, son funciones matemáticas cuyo dominio es un conjunto de números reales y su rango es un conjunto infinito de vectores dimensionales. La notación convencional para tal función es,

De la ecuación anterior está claro que el rango de tal función es R^3 o R^m . La interpretación de esta oración sería que la función está asociada con tres o más funciones de variables reales $f_1, f_2, f_3 \dots f_m$. Por tanto, se puede escribir de tal manera que,

Una función vectorial puede tomar como valor de entrada tanto cantidades escalares como cantidades vectoriales, pero el resultado siempre será una cantidad vectorial. Como podemos ver aquí el rango de dicha función está infinitamente extendido, pero no afecta el rango del dominio de la función de alguna manera. Dado que el rango de la función es infinito, por tanto puede ser dividido sus componentes constitutivos. Por ejemplo, si el rango es de dos dimensiones entonces el rango se puede dividir en sus componentes como,

Y si el rango es de tres dimensiones, entonces puede ser dividida en sus componentes como,

Un punto digno de mención es que el dominio de la función vectorial es la intersección de los dominios de todas las funciones constituyentes que en su totalidad forman el rango de la función vectorial.

Después de haber leído la definición de una función valorada vectorial, es importante saber, ¿por qué surgió la necesidad de desarrollar funciones

vectoriales cuando ya teníamos otras funciones con nosotros? Una función vectorial representa principalmente una función que varía con respecto al tiempo.

3.2 Graficación de curvas en función del parámetro t .

El sistema de coordenadas polares no es muy diferente de un sistema de coordenadas Cartesianas. Mientras en un sistema de coordenadas Cartesianas tenemos una cuadrilla rectangular de rectas verticales y horizontales que representan los ejes x e y respectivamente, en un sistema de coordenadas polares tenemos un polo en el centro el cual es equivalente al origen en el sistema de coordenadas Cartesianas, y tenemos muchos círculos concéntricos que tienen su origen en el polo y algunas rectas que pasan por el polo formando ángulos diferentes en el mismo.

La longitud de estas rectas forma la coordenada radial del sistema, es decir, ' r ' y el ángulo en el cual subtienden con respecto al eje x forma las coordenadas polares del sistema, esto es, t , el cual está en radianes. Por lo tanto, el sistema de coordenadas polares está representado por un par de coordenadas tales como (r, t) .

Una curva polar sólo puede ser graficada en un sistema de coordenadas polares para alcanzar precisión. Trazar una curva polar es muy parecido a trazar una curva Cartesiana. Es necesario tomar en cuenta dos técnicas mientras grafica una curva polar, la primera, y bastante frecuente, es el trazado de los puntos y, la segunda, comprobar la simetría de la curva.

3.3 Derivación de funciones vectoriales y sus propiedades

El cálculo aplicado a las funciones Cartesianas puede ser extendido también para ser aplicable a las funciones vectoriales. Como ya sabemos una función vectorial, es en realidad, una función compuesta de varias funciones constituyentes. Cada

una de estas funciones constituyentes es una función independiente que determina el efecto del cambio de variable en su dirección correspondiente, y el efecto general del cambio de variable puede ser conocido a través de la función compuesta, esta es la función vectorial.

Puesto que una función vectorial es una función compuesta, esta no puede ser diferenciada directamente, en lugar de diferenciarla, necesitamos diferenciar cada una de sus funciones constituyentes por separado. Las técnicas utilizadas para integrar una función Cartesiana se pueden aplicar para diferenciar una función vectorial debido a que las funciones constitutivas de la misma son funciones valoradas reales.

Asuma que es la función vectorial que será diferenciada para obtener dr/dt o $\dot{r}$. Aquí la diferenciación se lleva a cabo con respecto al tiempo 't' porque una función valorada vectorial se define con respecto a la variable tiempo. Entonces la derivada de esta función se denota como,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

3.4 Integración de funciones vectoriales.

Una función vectorial es una función definida en términos de la variable tiempo. El rango de esta función es multidimensional dado que la función está constituida por diversos componentes, donde cada uno de los componentes varía con respecto al tiempo en una de las direcciones. Por lo tanto, de manera informal una función vectorial puede denotarse como,

Aquí, cada una de las funciones individuales es una función vectorial de variable real en sí misma. Por lo tanto, el conjunto de funciones $(p(t), q(t), r(t))$ es una asignación de un intervalo cerrado en R^k , la cual es de rango dimensional k para la función dada. Las dimensiones de entrada y salida de una función vectorial son iguales, las cuales son un vector con alguna forma determinada.

La integración de la función se lleva a cabo mediante la integración de cada uno de los componentes individuales de la función. Por lo tanto la integración de la función vectorial se valora,

Aquí la integración se hace con respecto a 't', la cual es la variable.

3.5 Longitud de arco.

Una mejor técnica para definir una curva es describirla con una función vectorial de variables reales. Esta es una estrategia alternativa para definir una curva y es mucho mejor aquella en la cual todos los puntos de la curva son vectores posición con puntos terminales. Debido a esto, la curva es descrita de forma compacta y el cálculo de distintas propiedades de la curva puede llevarse a cabo convenientemente.

Si hablamos de curvas, una propiedad importante que surge es la longitud del arco de la curva. Las funciones vectoriales de una variable también se definen paramétricamente; por tanto la definición de la longitud del arco es la misma que para otras curvas definidas paramétricamente.

3.6 Vector tangente, normal y binormal.

La tangente de una curva es una recta que intersecta la curva en un solo punto. Es conocido por nosotros a través del cálculo que mediante la diferenciación de una función se obtiene el punto tangencial para la curva de esa función. Un concepto similar es aplicable al cálculo vectorial, junto con una excepción.

Para una función con un vector de la forma, $(\mathbf{x})$, un vector de la forma es llamado vector tangente en el caso de que esta función sea real y su magnitud no sea igual a cero. En esta situación, la tangente de la función dada $(\mathbf{x})$ en un punto arbitrario es paralela al vector tangente, en ese punto. Aquí, con el fin de tener un vector tangente, 0 es un pre-requisito esencial. Esto es debido a que un vector de magnitud cero no puede tener dirección.

3.7 Curvatura.

La medida en la cual se desvía un determinado objeto geométrico se conoce como curvatura. Existen básicamente dos tipos principales de curvatura: curvatura intrínseca y extrínseca. Para los objetos que se encuentran en un espacio diferente, en este tipo de enfoque que se relaciona con la curvatura del radio del círculo que traza el objeto correspondiente, se define una curvatura extrínseca. El círculo puede ser el ejemplo más sencillo de una curvatura extrínseca dado que en cada punto de la circunferencia; la curvatura es igual al recíproco del radio. La curvatura intrínseca en la naturaleza es descrita por la variedad de Riemann en cada punto.

Una curvatura en un plano pertenece a una cantidad escalar, mientras que en 2D o 3D, la identidad de la curvatura es definida como un vector en el cual tanto la nitidez como la dirección de inclinación es considerada.

3.8 Aplicaciones.